



ID del documento: INRI-Vol.1.N.2.002.2023

Tipo de artículo: Investigación

Solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de Cauchy Euler no homogénea de segundo orden aplicando el método ECA

Particular solution of a non-homogeneous second-order ordinary Cauchy Eulerian differential equation using the ECA method

Autores:

1. Pedro Antonio Saltos García
2. Luis David Bastidas Gonzáles

¹Universidad Estatal de Milagro, Ecuador, <https://orcid.org/0000-0002-4416-2488>, psaltosg@unemi.edu.ec

²Universidad Estatal de Milagro, Ecuador, <https://orcid.org/0000-0003-3060-4342>, davidbastidasg1@gmail.com

Autor de Correspondencia: SALTOS GARCÍA PEDRO ANTONIO, psaltosg@unemi.edu.ec

Fecha de recepción: 06-10-2023

Aceptación: 26-10-2023

Publicado: 30-10-2023

How to cite this article:

Saltos García, P. A., & Bastidas González, L. D. (2023). Solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de Cauchy Euler no homogénea de segundo orden aplicando el método ECA. *Intellectual Network Revista Internacional*, 1(2), 1-19. https://revinde.org/index.php/intellectual_network/article/view/6



Resumen

Las ecuaciones diferenciales han sido una herramienta fundamental en múltiples áreas de la ciencia y la tecnología, ya que permiten describir fenómenos dinámicos y establecer conexiones entre variables en sistemas complejos. En este artículo se aborda la resolución particular de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden del tipo $x^2y'' + xy' = f(x)x^2$ y $y'' + x y' = f(x)x^2y'' + xy' = f(x)$, conocida como ecuación de Cauchy-Euler. Para resolverla, se utiliza el método ECA, que se basa en un cambio de variable con el objetivo de transformarla en una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Posteriormente, la solución se expresa nuevamente en términos de la variable original, obteniendo así una solución particular equivalente a la que se lograría mediante el método de variación de parámetros o el uso de herramientas computacionales. El enfoque adoptado es de carácter analítico y considera distintos escenarios según las raíces de la ecuación auxiliar, ya sean reales distintas o reales repetidas. Los resultados fueron comparados con los obtenidos por otros métodos como variación de parámetros, transformación a coeficientes constantes y programas matemáticos como Symbolab y Wolfram. Se concluye que el método ECA ofrece una alternativa eficaz para resolver ecuaciones de Cauchy-Euler, optimizando los cálculos sin sacrificar exactitud.

Palabras clave: Cauchy-Euler, ecuación diferencial lineal, variación de parámetros, solución particular.

Abstract

Differential equations have been a fundamental tool in multiple areas of science and technology, as they allow us to describe dynamic phenomena and establish connections between variables in complex systems. This article addresses the specific solution of a second-order nonhomogeneous ordinary differential equation of this type. $x^2y'' + xy' = f(x)x^2$ y $y'' + x y' = f(x)x^2y'' + xy' = f(x)$, known as the Cauchy-Euler equation. To solve it, the ECA method is used, which is based on a change of variable with the aim of transforming it into a linear differential equation with constant coefficients. Subsequently, the solution is expressed again in terms of the original variable, thus obtaining a particular solution equivalent to that which would be achieved by the method of variation of parameters or the use of computational tools. The approach adopted is analytical and considers different scenarios depending on the roots of the auxiliary equation, whether they are distinct real roots or repeated real roots. The results were compared with those obtained by other methods such as variation of parameters, transformation to constant coefficients, and mathematical programs such as Symbolab and Wolfram. It is concluded that the ECA method offers an effective alternative for Solve Cauchy-Euler equations, optimizing calculations without sacrificing accuracy.

Keywords: Cauchy-Euler, linear differential equation, variation of parameters, particular solution.





1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel esencial en la formulación y resolución de problemas dentro de diversas disciplinas científicas y tecnológicas. Su utilidad se extiende a campos como la ingeniería, la física, la biología y la economía, ya que permiten representar fenómenos dinámicos y establecer vínculos entre variables en sistemas complejos.

Según Alvarado (2024), estas ecuaciones constituyen una herramienta clave en múltiples áreas del conocimiento. Entre los métodos más empleados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, se destacan el método de variación de parámetros, la transformación a coeficientes constantes (Zill, 2009) y el uso de programas especializados como Symbolab, Derive, Wolfram o Matlab.

En esta investigación se abordan únicamente aquellos casos en los que la ecuación auxiliar asociada genera raíces reales, ya sean distintas o repetidas, descartando situaciones con raíces complejas (Nagy, 2021).

La solución particular obtenida mediante la aplicación del método ECA (Estrategia de Cambio de Variable Algebraica) resulta equivalente a la obtenida utilizando el método de variación de parámetros o mediante software matemático.

El método ECA emplea un cambio de variable que permite transformar la ecuación original en una de coeficientes constantes, lo que simplifica significativamente el proceso de resolución. A diferencia del método de variación de parámetros, que requiere el uso de sistemas de ecuaciones, matrices, determinantes e integrales indefinidas, el enfoque ECA ofrece una alternativa más directa y eficiente.

2. DESARROLLO

Como docente universitario con varios años de experiencia, he podido observar de forma directa las dificultades que enfrentan los estudiantes de las carreras de Ciencias de la Ingeniería en la Universidad Estatal de Milagro al aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución particular de ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden del tipo Cauchy-Euler. Estas dificultades se deben principalmente a la complejidad del procedimiento, que implica el uso de sistemas de ecuaciones, matrices, cálculo de determinantes e integrales indefinidas. Además, las expresiones resultantes deben sustituirse posteriormente en la solución homogénea para obtener la solución general (Ferrer, 2018).

Tradicionalmente, los autores de libros especializados recomiendan resolver la ecuación homogénea asociada y luego aplicar el método de variación de parámetros para hallar la solución particular. Esta solución suele expresarse en términos de funciones como potencias de x .





x, senos, cosenos o logaritmos (Zill, 2009). Según DiPrima y Boyce (2004), en el caso de ecuaciones de Cauchy-Euler no homogéneas, es factible aplicar dicho método para obtener una solución particular, lo cual requiere resolver primero la homogénea asociada y, posteriormente, llevar a cabo procedimientos que involucran matrices, sistemas de ecuaciones e integrales.

En la presente investigación se compararon los métodos de variación de parámetros y el método ECA (Estrategia de Cambio de Variable Algebraica) para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de segundo orden de Cauchy-Euler. El estudio se aplicó a 89 estudiantes de la carrera de Ingeniería en Biotecnología y 57 estudiantes de Ingeniería Ambiental, todos ellos cursando el tercer semestre en la Universidad Estatal de Milagro (UNEMI), durante la última parte del año 2024, una vez finalizado el periodo lectivo. Los resultados mostraron que el 88% de los estudiantes optaron por utilizar el método ECA en lugar del método de variación de parámetros. Las soluciones homogénea y particular fueron validadas utilizando softwares matemáticos como apoyo (Carlos et al., 2014).

Tabla 1. Alumnos que aplicaron el método de variación de parámetros y el método ECA

Método/Carrera	Universo	Variación de parámetro		ECA	
		Alumnos	%	Alumnos	%
Biotecnología	89	11	12	78	88
Ambiental	57	6	11	51	89
Total	146	17	12	128	88

3. Materiales y Métodos

Formulación Matemática

En este artículo aplicaremos el método ECA, para encontrar la solución particular y_p de una ecuación diferencial ordinaria Cauchy Euler de segundo orden no homogénea de la forma $x^2y'' + xy' = f(x)$, en la cual se aplicará el cambio de variables $\theta = y'$, y así transformarla en una ecuación diferencial lineal de la forma $\theta' + p(x)\theta = q(x)$ cuyo resultado será integrado $y_p = \int y' dx$, para obtener la solución particular

$$y'' + y' = f(x)$$

EDO Cauchy Euler no homogénea

$$x^2 y'' + x y' = f(x)$$

$$y'' + y' = f(x)$$



División para x2

x x2
theta = y' theta' = y'' Cambios de variables

theta
theta' + =
x

f(x) Ecuación diferencial lineal
x2

v = integral p(x)dx Cálculo integral
h(x) = ev Cálculo exponencial
h(x). theta = integral h(x). q(x) dx Fórmula general solución EDO lineal

yp = integral y' dx Solución particular

4. Resultados

1.- x2y'' - 2xy' = 8x4 EDO Cauchy Euler no homogénea Solución homogénea (yc)

x2y'' - 2xy' = 0 EDO Cauchy Euler homogénea

[r(r - 1) - 2r]y Ecuación auxiliar

r = 0 y r = 3 Raíces reales distintas

y = C1 + C2e3t Solución homogénea en términos de t

t = ln x Criterio Cauchy Euler

yc = C1 + C2x3 Solución homogénea

Solución particular (yp) - Método variación de parámetros

w = [1 x3] = 3x2 Cálculo determinante (w)

0 3x2

w = [0 x3] = -8x5 Cálculo determinante (w)

1 8x2 3x2 1

[1 0

0 8x2

] = 8x2 Cálculo determinante (w2)

3 4

C = integral w1 dx C = integral - 8x dx = - 2x Cálculo integral (C)

1 w 1 3 3 1

C = integral w2 dx C

= integral 8 dx = 8x

Cálculo integral (C)



2 w 2 3 3 2
yc = C1 + C2x3 Solución homogénea

y = - 2x4 + 8x4 = 2x4 Solución particular

p 3 3

Solución particular (yp) - Método ECA

x2y'' - 2xy' = 8x4 EDO Cauchy Euler no homogénea

y'' - 2y' = 8x2 División para x2

x

theta = y' theta' = y'' Cambios de variables

theta' - 2theta = 8x2 Ecuación diferencial lineal

x

v = - integral 2 dx = -lnx2 Cálculo integral (v)

x

h(x) = e^-lnx2 = 1

x2

Cálculo exponencial h(x)

h(x). theta = integral h(x). q(x) dx Fórmula general solución EDO lineal

1 . y' = integral 1 . 8x2 dx

x2 x2

1 . y' = integral 8 dx Cálculo integral 1 . y'

x2

y' = 8x y' = 8x3 Solución lineal

x2

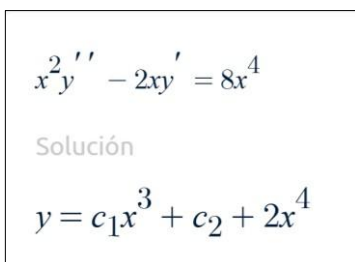
x2

yp = integral y' dx Integral de solución lineal

yp = integral 8x3 dx = 2x4 Solución particular

Solución general software Symbolab (yg = yc + yp)

Figura 1. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



2.- x2y'' + 2xy' = 12x3 EDO Cauchy Euler no homogénea

Solución homogénea (yc)

x2y'' + 2xy' = 0 EDO Cauchy Euler homogénea



$[r(r - 1) + 2r]y$ Ecuación auxiliar

$r = 0$ y $r = -1$ Raíces reales distintas

$y = C_1 + C_2e^{-t}$ Solución homogénea en términos de t

$t = \ln x$ Criterio Cauchy Euler

$y = C$

$+ C_1$

Solución homogénea

$c = 1$

$2x$

Solución particular (y_p) - Método variación de parámetros

$1 = 1$

$w = [x] = -1$

Cálculo determinante (w)

$0 = -1$

x^2

$0 = 1$

x^2

$w_1 = [$

$x] = -12$ Cálculo determinante (w_1)

$12x = -1$

x^2

$w = [1 0$

$0 = 12x$

$] = 12x$ Cálculo determinante (w_2)



C = ∫ w1 dx C = ∫ 12x2 dx = 4x3 Cálculo integral (C)

1 w 1 1

C = ∫ w2 dx C

= ∫ -12x3 dx = -3x4 Cálculo integral (C)

2

y = C

w

+ C 1

2 2

Solución homogénea

c 1

2 x

yp = 4x3 - 3x3 = x3 Solución particular

Solución particular (yp) - Método ECA

x2y'' + 2xy' = 12x3 EDO Cauchy Euler no homogénea

y'' + 2y' = 12x División para x2

x

θ = y' θ' = y'' Cambios de variables

θ' + 2θ = 12x Ecuación diferencial lineal

x

v = ∫ 2 dx = ln x2 Cálculo integral (v)

x

h(x) = e ln x2 = x2 Cálculo exponencial h(x)

h(x). θ = ∫ h(x). q(x) dx Fórmula general solución EDO lineal

x2. y' = ∫ x2. 12x dx

x2. y' = ∫ 12x3 dx Cálculo integral x2. y'

x2y' = 3x4 y' = 3x2 Solución lineal

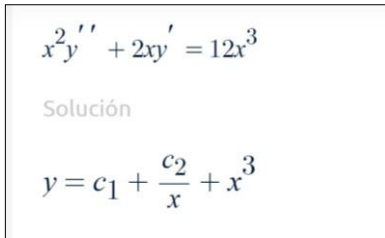


$yp = \int y' dx$ Integral de solución lineal

$yp = \int 3x^2 dx = x^3$ Solución particular

Solución general software Symbolab ($yg = yc + yp$)

Figura 2. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



3.- $x^2y'' - xy' = 8x^4$ EDO Cauchy Euler no homogénea

Solución homogénea (yc)

$x^2y'' - xy' = 0$ EDO Cauchy Euler homogénea

$[r(r - 1) - r]y$ Ecuación auxiliar

$r = 0$ y $r = 2$ Raíces reales distintas

$y = C1 + C2e^{2t}$ Solución homogénea en términos de t

$t = \ln x$ Criterio Cauchy Euler

$yc = C1 + C2 \cdot x^2$ Solución homogénea

Solución particular (yp) - Método variación de parámetros

$w = [1 \ x^2] = 2x$ Cálculo determinante (w)

0 2x

$w = [0 \ x^2] = -8x^4$ Cálculo determinante (w)

1 8x^2 2x 1

[1 0

0 8x^2

] = 8x^2 Cálculo determinante (w^2)

$C = \int w1 dx \ C = \int -4x^3 dx = -x^4$ Cálculo integral (C)

1 w 1 1

$C = \int w2 dx \ C = \int 4x dx = 2x^2$ Cálculo integral (C)



$$2 \quad w \quad 2 \quad 2$$

$$yc = C1 + C2. x^2 \quad \text{Solución homogénea}$$

$$yp = -x^4 + 2x^4 = x^4 \quad \text{Solución particular}$$

Solución particular (yp) - Método ECA

$$x^2y'' - xy' = 8x^4 \quad \text{EDO Cauchy Euler no homogénea}$$

$$y'' - y' = 8x^2 \quad \text{División para } x^2$$

x

$$\theta = y' \quad \theta' = y'' \quad \text{Cambios de variables}$$

θ'

$-\theta$

x

$$= 8x^2$$

Ecuación diferencial lineal

$$v = \int -1 dx = -\ln x \quad \text{Cálculo integral } (v)$$

x

$$h(x) = e^{-\ln x} = 1$$

x

Cálculo exponencial $h(x)$

$$h(x). \theta = \int h(x). q(x) dx \quad \text{Fórmula general solución EDO lineal}$$

$$1 . y' = \int 1 . 8x^2 dx$$

$x \quad x$

$$1 . y' = \int 8x dx \quad \text{Cálculo integral } 1 . y'$$

$x \quad x$

$$1 y' = 4x^2 \quad y' = 4x^3 \quad \text{Solución lineal}$$

x

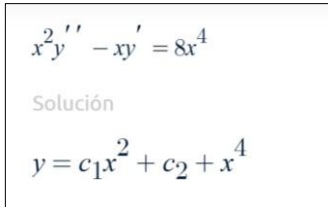
$$yp = \int y' dx \quad \text{Integral de solución lineal}$$



$yp = \int 4x^3 dx = x^4$ Solución particular

Solución general software Symbolab ($yg = yc + yp$)

Figura 3. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



4.- $x^2y'' + 2xy' = 4x$ EDO Cauchy Euler no homogénea

Solución homogénea (yc)

$x^2y'' + 2xy' = 0$ EDO Cauchy Euler homogénea

$[r(r - 1) + 2r]y$ Ecuación auxiliar

$r = 0$ y $r = -1$ Raíces reales distintas

$y = C1 + C2e^{-t}$ Solución homogénea en términos de t

$t = \ln x$ Criterio Cauchy Euler

$y = C$

$+ C 1$

Solución homogénea

$c \quad 1$

$2 x$

Solución particular (yp) - Método variación de parámetros

$1 \quad 1$

$w = [\quad x] = - 1$

Cálculo determinante (w)



0 - 1

x²

0 1

x²

w₁

= [4

x

x

- 1

x²

] = - 4 x²

Cálculo determinante (w₁)

1 0 4

w₂ = [0 4] = x Cálculo determinante (w₂)

x

C = ∫ w₁ dx C = ∫ 4 dx = 4x Cálculo integral (C)

1 w 1 1

C = ∫ w₂ dx C

= ∫ -4x dx = -2x² Cálculo integral (C)

2

y = C

w

+ C 1

2 2

Solución homogénea



$$c = 1$$

$$2x$$

$$yp = 4x - 2x = 2x \quad \text{Solución particular}$$

Solución particular (yp) - Método ECA

$$x^2y'' + 2xy' = 4x \quad \text{EDO Cauchy Euler no homogénea}$$

$$y'' + 2y' = 4$$

División para x^2

$$x \quad x$$

$$\theta = y' \quad \theta' = y'' \quad \text{Cambios de variables}$$

$$\theta' + 2\theta = 4$$

Ecuación diferencial lineal

$$x \quad x$$

$$v = \int 2 dx = \ln x^2 \quad \text{Cálculo integral } (v)$$

$$x$$

$$h(x) = e^{\ln x^2} = x^2 \quad \text{Cálculo exponencial } h(x)$$

$$h(x) \cdot \theta = \int h(x) \cdot q(x) dx \quad \text{Fórmula general solución EDO lineal}$$

$$x^2 \cdot y' = \int x^2 \cdot 4 dx$$

$$x$$

$$x^2 \cdot y' = \int 4x dx \quad \text{Cálculo integral } x^2 \cdot y'$$

$$x^2y' = 2x^2 \quad y' = 2 \quad \text{Solución lineal}$$

$$yp = \int y' dx \quad \text{Integral de solución lineal}$$

$$yp = \int 2 dx = 2x \quad \text{Solución particular}$$

Solución general software Symbolab ($yg = yc + yp$)

Figura 4. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



$$x^2 y'' + 2xy' = 4x$$

Solución

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x} + 2x$$

5.- $x^2 y'' - xy' = 8/x^2$ EDO Cauchy Euler no homogénea

Solución homogénea (y_c)

$x^2 y'' - xy' = 0$ EDO Cauchy Euler homogénea

$[r(r - 1) - r]y$ Ecuación auxiliar

$r = 0$ y $r = 2$ Raíces reales distintas

$y = C_1 + C_2 e^{2t}$ Solución homogénea en términos de t

$t = \ln x$ Criterio Cauchy Euler

$y_c = C_1 + C_2 \cdot x^2$ Solución homogénea

Solución particular (y_p) - Método variación de parámetros

$w = [1 \ x^2] = 2x$ Cálculo determinante (w)

$0 \quad 2x$

$w = [0 \quad x^2] = -8/x^2$ Cálculo determinante (w)

$1 \quad 8/x^4 \quad 2x \quad 1$

w^2

$= [1 \quad 0$

$0 \quad 8/x$

$] = 8/x^4$ Cálculo determinante (w^2)

$C = \int w_1 dx \quad C = \int -4/x^3 dx = 2/x^2$ Cálculo integral (C)

$1 \quad w \quad 1 \quad 1$

$C = \int w_2 dx \quad C = \int 4/x^5 dx = -1/x^4$ Cálculo integral (C)

$2 \quad w \quad 2 \quad 2$

$y_c = C_1 + C_2 \cdot x^2$ Solución homogénea



yp

$= 2$

x^2

$- 1$

x^2

$= 1$

x^2

Solución particular

Solución particular (yp) - Método ECA

$$x^2y'' - xy' = 8$$

x^2

$$y'' - y' = 8$$

EDO Cauchy Euler no homogénea

División para x^2

$$x \quad x^4$$

$\theta = y' \quad \theta' = y''$ Cambios de variables

$$\theta' - \theta = 8$$

$\theta - x = x^4$ Ecuación diferencial lineal

$$v = \int -1 dx = -\ln x \quad \text{Cálculo integral (v)}$$

x

$$h(x) = e^{-\ln x} = 1$$

x

Cálculo exponencial $h(x)$

$h(x) \cdot \theta = \int h(x) \cdot q(x) dx$ Fórmula general solución EDO lineal

$$1 \cdot y' = \int 1 \cdot 8 dx$$



$x^2 y' = 8x$

x^4

1. $y' = \int 8 dx$ Cálculo integral 1. y'

$x^5 = x$

$1 y' = -2$

$y' = -2$

Solución lineal

x^4

x^3

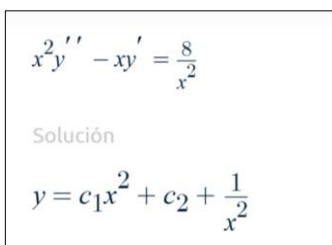
$yp = \int y' dx$ Integral de solución lineal

$y = \int -2 dx = 1$

Solución particular

$p = x^3 = x^2$

Figura 5. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



6.- $x^2 y'' + xy' = 9x^3$ EDO CauchyEuler no homogénea

Solución homogénea (yc)

$x^2 y'' - xy' = 0$ EDO Cauchy Euler homogénea

$[r(r - 1) + r]y$ Ecuación auxiliar

$r = 0$ y $r = 0$ Raíces reales iguales

$y = C1 + C2.t$ Solución homogénea en términos de t



$t = \ln x$ Criterio Cauchy Euler

$yc = C1 + C2 \cdot \ln x$ Solución homogénea

Solución particular (yp) - Método variación de parámetros

1 $\ln x$

$w = [$

0 $1/x$

$] = 1/x$ Cálculo determinante (w)

$w = [0 \quad \ln x] = -9x \ln x$ Cálculo determinante (w)

1 $9x \quad 1/x \quad 1$

$w = [1 \ 0] = 9x$ Cálculo determinante (w)

0 $9x$

$C = \int w1 \, dx \quad C$

$= \int -9x^2 \ln x \, dx = -3x^3 \ln x + x^3$ Cálculo integral

1 $w \quad 1 \quad (C1)$

$C = \int w2 \, dx \quad C = \int 9x^2 \, dx = 3x^3$ Cálculo

2 $w \quad 2$

integral ($C2$)

$yc = C1 + C2 \cdot \ln x$ Solución homogénea

$yp = -3x^3 \ln x + x^3 + 3x^3 \ln x = x^3$ Solución particular

Solución particular (yp) - Método ECA

$x^2 y'' + xy' = 9x^3$ EDO Cauchy Euler no homogénea

$y'' + y' = 9x$ División para x^2

x

$\theta = y' \quad \theta' = y''$ Cambios de variables

$\theta' + \theta/x = 9x$ Ecuación diferencial lineal

$v = \int 1 \, dx = \ln x$ Cálculo integral (v)

x

$h(x) = e^{\ln x} = x$ Cálculo exponencial $h(x)$



$h(x). \theta = \int h(x). q(x) dx$ Fórmula general solución EDO lineal

$x. y' = \int x. 9x dx$

$x. y' = \int 9 x^2 dx$ Cálculo integral $x. y'$

$x. y' = 3x^3 \quad y' = 3x^2$ Solución lineal

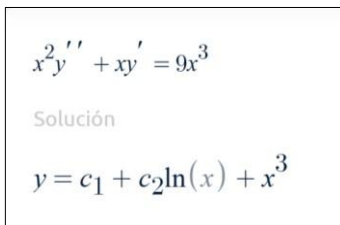
$yp = \int y' dx$ Integral de solución lineal

$yp = \int 3x^2 dx = x^3$ Solución particular

Solución general software Symbolab ($yg = yc + yp$)

Solución general software Symbolab ($yg = yc + yp$)

Figura 6. Captura de pantalla de software Symbolab de la solución general.



6. CONCLUSIÓN

La investigación cuantitativa llevada a cabo con estudiantes de las carreras de Ingeniería en Biotecnología e Ingeniería Ambiental de la Universidad Estatal de Milagro (UNEMI) reveló que el 88 % de los participantes prefirieron el uso del método ECA sobre otros métodos tradicionales para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden tipo Cauchy-Euler. Esta elección se basó en la percepción generalizada de que el método ECA es más sencillo, práctico y confiable para obtener la solución particular.

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del método ECA fueron equivalentes a los que se obtienen utilizando el método de variación de parámetros o mediante el uso de software matemático especializado. Esto evidencia que el método ECA, además de ser más accesible para los estudiantes, no compromete la precisión de los resultados.

En forma análoga se puede obtener la solución particular de una ecuación diferencial ordinaria Cauchy Euler no homogénea tercer orden $x^3 y''' + x^2 y'' = f(x)$, aplicando cambio de variables $\theta = y''$, para resolverla en forma de una EDO lineal de la forma $\theta' +$

$p(x)\theta = q(x)$, el resultado de la solución particular será la $yp = \int \int y'' dx$.



Conflicto de Intereses:

Los autores declaran que no existe ningún conflicto de intereses en la realización de este estudio. Asimismo, se certifica que este trabajo ha seguido los principios éticos establecidos por esta revista y que no ha sido publicado previamente, ni en su totalidad ni parcialmente, en ninguna otra publicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado Bastidas, E. A. (2024). Exploración de técnicas de modelado en sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales. *Sapiens in Higher Education*, 1(1), 28-38. https://revistasapiensec.com/index.php/Sapiens_in_Higher_Education/article/view/70

CARLOS, B. G., JOSE, ALBERTO, D. B., & SEBASTIÁN, L. L. (2014). Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ediciones Paraninfo, S.A. <https://www.paraninfo.es/catalogo/9788428330152/ecuaciones-diferenciales-ordinarias>

DiPrima, R. C., & Boyce, W. E. (2004). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. <https://www.imsc.res.in/~pralay/diprima.pdf>

Ferrer, D. D. M. (2018). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y sus Aplicaciones. https://www.researchgate.net/publication/325405727_Ecuaciones_Diferenciales_Ordinarias_y_sus_Aplicaciones

Nagy, G. (2021). Ordinary Differential Equations.

Zill, D. G. (2009). A first course in differential equations with modeling applications (9th ed).

Brooks/Cole, Cengage Learning.

Declaración de Conflicto de Intereses: Los autores declaran que no presentan conflictos de intereses relacionados con este estudio y confirman que todos los procedimientos éticos establecidos por esta revista han sido rigurosamente respetados. Asimismo, garantizan que este trabajo es inédito y no ha sido publicado, ni parcial ni totalmente, en ninguna otra revista académica.